La Récurrence

• Encadrement

Exercice 4

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) suivante : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $u_n \leqslant u_{n+1}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer par récurrence que (u_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

Formule générale

Exercice 6

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 1

On donne la suite (u_n) suivante : $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 7$.
Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

Exercice 6 corrigé disponible

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.

1. Quelle est la nature de (u_n) ? Prouver que $u_n = 1 + 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. La suite (v_n) est définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + u_n$.

   (a) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

   (b) Démonter par récurence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + n^2$

   (c) Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 4 corrigé disponible

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et pour tout entier naturel } n, \qquad u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = n^2 + n$$

Sens de variation

Exercice 13

On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Conjecturer le sens de variation de (u_n).
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.
3. Démontrer la conjecture.

Un peu de tout

Exercice 8

Un exercice répétitif pour maîtriser le raisonnement par récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et par $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{4+u_n}$ pour tout entier naturel n.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$ est vraie.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$, et par $v_{n+1} = 0,6v_n + 14$ pour tout entier naturel n.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n = (-28) \times 0,6^n + 35$.

4. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 1$, et par $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 2}$ pour tout entier naturel n.
Montrer par récurrence que la suite (w_n) est strictement croissante.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Somme

Exercice 1

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 12

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Limites

Reconnaitre les formes indéterminées

Dans chaque cas, on donne la limite de u_n et v_n.
Déterminer si possible, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -4 \end{cases}$

Dans chaque cas, on donne la limite de u_n et v_n.
Déterminer si possible, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$

Dans chaque cas, on donne la limite de u_n et v_n et le signe de v_n.
Déterminer si possible, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \\ v_n > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \\ v_n < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \\ v_n > 0 \end{cases}$

A l'aide des tableaux de la somme, du produit et du quotient, déterminer si possible $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

a) $u_n = n^2 + n$ b) $u_n = n^2 - n$ c) $u_n = \dfrac{2}{n+2}$

d) $u_n = \dfrac{3}{2-n^2}$ e) $u_n = \dfrac{n^2+2}{n+1}$ f) $u_n = \dfrac{3}{0.5^n}$

Exercice 1

Un exercice répétitif pour apprendre les opérations sur les limites de suites.

1. Soit (b_n) la suite définie par $b_n = -2n^3 + 8$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -4n^2 - \sqrt{n} + 11$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{9 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 2.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
4. Soit (r_n) la suite définie par $r_n = \frac{1 - 0,98^n}{1 - n^2}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 2.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.
5. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = -n^3 + 3n^2 - 2n$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.
6. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = \frac{n+9}{-n+7}$ pour tout naturel n supérieur ou égal à 8.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.
7. Soit (p_n) la suite définie par $p_n = \frac{8n^2 - n + 1}{n + 2}$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Formes Indéterminées

Exercice 1

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 1}$ pour tout n entier naturel.

2. $u_n = \dfrac{n^3 - 1}{3n^2 + 5n^4}$ pour tout n entier naturel non nul.

3. $u_n = \dfrac{1 - n^3}{n - 5n^4}$ pour tout n entier naturel non nul.

4. $u_n = \dfrac{2n^4 - 1}{n^2 + 5n^4}$

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite u :

a) $u_n = n - \sqrt{n}$ b) $u_n = 3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2}$ c) $u_n = \dfrac{4n - 3}{n^2 + 5}$

Limite de suite et forme indéterminée

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 - 3n^2$ b) $u_n = \dfrac{n^2 - 2n}{n + 1}$ c) $u_n = \dfrac{n^2 + n}{1 - n^2}$

Exercice 6

Déterminer les limites en $+\infty$ de :

1. $u_n = \dfrac{n}{5} + 7 - \dfrac{3n}{n^2+4}$

2. $u_n = \dfrac{6n^2 - 3n + 7}{n^2 + n + 1}$

3. $u_n = \sqrt{\dfrac{3n^2 - 1}{5n + 4}}$

4. $u_n = n^2 \left(\sqrt{3 - \dfrac{2}{n}} - \sqrt{3} \right)$

5. $u_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+325}$ b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$ c) $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$ d) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$ f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$ g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ h) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Comparaisons

Exercice 2

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 - \sin n}{n+1}$ pour tout n entier naturel.

2. $u_n = n^2 - (-1)^n$ pour tout n entier naturel.

3. $u_n = \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Démontrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Limite de suite, encadrement et théorème des gendarmes

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$ b) $u_n = n - \cos(n)$ c) $u_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

Exercice 5

Un exercice utilisant les théorèmes de comparaison.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^3 + \sqrt{n^2 - n + 3} + 11$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ **par comparaison**.
2. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout naturel n non nul.
   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} w_n$ en utilisant le **théorème des gendarmes**.
3. Montrer que, pour tout naturel n, $n^2 - n + 8 > 0$.
   Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2n^2 + \cos n}{n^2 - n + 8}$ pour tout naturel n.
   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} v_n$ en utilisant le **théorème des gendarmes**.

géométrique

Exercice 3

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{0,5^n - 0,2^n}{2^n + 1}$ pour tout n entier naturel non nul.

Exercice 3

Un exercice de base, assez simple, sur une suite de référence...

Un objet valant 1 000 euros décote de 5% par an.
Soit u_n la valeur de l'objet (en euros) au bout de n années. Ainsi, $u_0 = 1\,000$.
1.a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout naturel n.
1.b. Qu'en déduire concernant la suite (u_n)?
1.c. Exprimer u_n en fonction de n .
1.d. Donner le sens de variation de (u_n) ainsi que sa limite.

Exercice 4

Un exercice de base, assez simple au début, sur une suite de référence...

Au mois de janvier 2000, le loyer payé par Isidore s'élève à 300 euros.
Soit u_n le loyer payé (en euros) au bout de n mois. Ainsi, $u_0 = 300$.
On suppose que, pour tout naturel n, on a: $u_n = 300 \times 1,002^n$.
1.a. Qu'en déduire concernant la suite (u_n)?
1.b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout naturel n.
1.c. De combien, en pourcentage, augmente le loyer chaque mois.
1.d. Donner le sens de variation de (u_n) ainsi que sa limite.

Exercice 7

Un exercice de bac très court centré sur des algorithmes!

La suite (u_n) est définie par $u_n = (-28) \times 0,6^n + 35$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} (u_n)$.

Limite et suite géométrique

Déterminer les limites éventuelles suivantes : $\lim_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + 5^n}{7^n}$

Avec une fonction

Exercice 2 : Application

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Soit f la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 2}$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1} \geqslant 1$.

   b. En déduite que la suite (u_n) est convergente.

   c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) sachant qu'elle vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exercice 11

Un exercice de bac parfois subtil!

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{3}; 0]$.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$, et par $u_0 = -\frac{1}{6}$.
1. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\frac{1}{3}; 0]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 > u_n > -\frac{1}{3}$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit l la limite de (u_n).
Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, montrer que $l = 0$ ou $l = \frac{1}{3}$.
6. En déduire finalement la valeur de $\lim_{n \to +\infty}(u_n)$.

Exercice 12 corrigé disponible

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) Démontrer cette conjecture.
2. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l.
4. Déterminer l.

Type BAC

Exercice 6 (D'après Polynésie juin 2013)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que $u_n < 1$ pour tout entier naturel n.
   Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 10

Un exercice de bac très complet!

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n} \end{cases}$

1.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $0 < v_n < 1$.

1.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$.

1.c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

2.a. On considère la suite (w_n) définie, pour tout naturel n, par $w_n = \frac{1}{v_n - 1}$.

Démontrer que la suite (w_n) est arithmétique de raison -1.

2.b. En déduire l'expression de w_n, puis celle de v_n en fonction de n.

3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty}(v_n)$.

Exercice 6

Un exercice classique, et facile, utilisant une suite auxiliaire de nature connue pour déterminer la formule explicite de la suite initiale.

Un lac contient 70 centaines de grenouilles hermaphrodites; elles peuvent changer de sexe au cours de leur vie. La population est supposée stable au cours du temps.

Au début de l'année 2020, le lac contient 7 centaines de mâles, et 63 centaines de femelles.

Chaque année, 20% des mâles deviennent femelles, et de même, 20% des femelles deviennent mâles.

Soit u_n le nombre de centaines de mâles au début de l'année $2020 + n$. Il est clair que $u_0 = 7$.

1.a. Montrer que $u_1 = 18,2$

1.b. Montrer que $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 14$ pour tout naturel n.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout naturel n, par $v_n = u_n - 35$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,6, et donner son premier terme.

3. Exprimer u_n en fonction de n pour tout naturel n.

4. Déterminer $\lim_{n \to +\infty}(u_n)$ et conclure.

Un exercice de bac très complet!

Un joueur effectue une succession de parties.

S'il a gagné une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut 0,8.

S'il a perdu une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut 0,5.

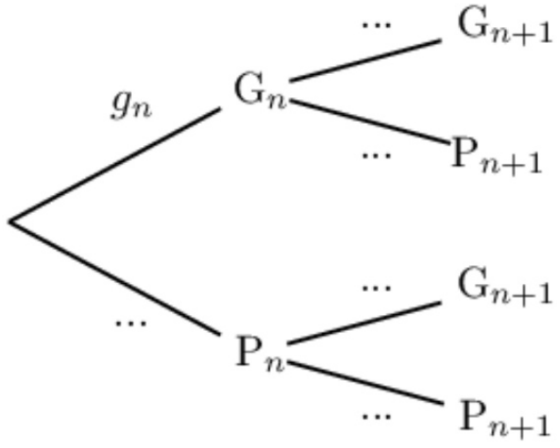
Soit G_n et P_n les événements:

G_n : "le joueur a gagné la n-ième partie"

P_n : "le joueur a perdu la n-ième partie"

Pour tout entier naturel n non nul, on pose: $g_n = p(G_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,5$
3. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut 0,9.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $\frac{5}{7} \leq g_n$
   b. Montrer que la suite (g_n) est décroissante.
   c. Montrer que la suite (g_n) est convergente.
   d. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} g_n$.
4. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut g, où g est un réel fixé de l'intervalle [0;1].
   On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = g_n - \frac{5}{7}$
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $g_n = (g - \frac{5}{7}) \times 0,3^{n-1} + \frac{5}{7}$.
   c. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} g_n$.
   d. Interpréter concrètement le résultat obtenu à la question précédente.

6. Métropole juin 2016

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.

Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015 + n$.

On a donc $u_0 = 10000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - 12000.$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).

   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n$.

   (d) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
   On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

   (a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que …
	N prend la valeur …
	U prend la valeur …
	Fin Tant que
Sortie	Afficher …

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

   (c) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation

$$12000 - 2000 \times 0,75^n \geqslant 11950.$$

2. Asie 2016

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015 + n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 250$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. La capacité optimale d'accueil est de 2 800 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
   Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif.

Exercice 7 (D'après Asie juin 2013)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$$

On admet que tout les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a :$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Nom :
Prénom :

DM n°1 Tmaths2

A rendre sur feuille le Mardi 20 septembre

Toutes les réponses seront justifiées avec soin.

Au large de Cape Town, en Afrique du Sud, l'organisme de la protection de la vie marine a recensé 3000 baleines au 1er juin 2019.
L'espèce sera déclarée en danger dans la zone si le nombre d'individus devient inférieur à 2000.
Les observations permettent d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :
- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la zone;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la zone subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre.

On modélise l'évolution du nombre de baleines par une suite (u_n).
Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2019+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

Partie A : Evolution du nombre d'individus

1. Montrer que $u_1 = 2926$ et que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95\, u_n + 76$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1520$.
3. a. Utiliser le résultat précédent pour montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
b. Que peut-on déduire de la question 3a sur la suite (u_n)? Interpréter ce résultat.
c. D'après ce modèle, la population de baleines est-elle vouée à disparaître totalement?

Partie B : Recherche d'une formule explicite (on traitera les deux méthodes).

1. **Méthode 1:** On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

2. **Méthode 2:** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

Partie C : L'espèce est-elle réellement menacée?

1. L'espèce sera-t-elle en danger le 1er juin 2039?
2. A partir de quelle date sera-t-elle déclarée en danger?
3. Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il détermine l'année à partir de laquelle le nombre de baleines présentes dans la zone de Cape Town sera inférieur à 2000.

```
def baleines():
        u= ….
        n = ….
        while ……………… :
                u = ……………
                n = ……………
        return ………………
```

On pourra tester le programme pour confirmer le résultat trouvé a la question C2.