exercice 14 :

Exercice 14 : [Étude de $\mathcal{S}_4$ et ses sous-groupes]. A faire Determiner $D(S_3)$

1. Calculer l'exposant des groupes $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$. Décrire les éléments de $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.
2. Montrer que $D(\mathcal{S}_4) = \mathcal{A}_4$ (on pourra admettre que les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_4$).
3. Soit $H = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset \mathcal{S}_4$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif et distingué de $\mathcal{S}_4$.
4. Montrer que $D(\mathcal{A}_4) = H$, i.e. le groupe engendré par les doubles transpositions (on pourra utiliser la question 5. de l'exercice 4).
   En déduire que $D(D(\mathcal{A}_4)) = \{Id\}$. *(On dit que $\mathcal{S}_4$ est résoluble de classe 3).*

1) $\exp(G) = \text{ppcm}(o(g) : g \in G)$

$o(g), g \in \mathcal{S}_3 = \{1 ; 2 ; 3\}$

donc $\exp(\mathcal{S}_3) = \text{ppcm}(2 ; 3)$
$= 6$

$o(g)$, $g \in S_4 = \{1; 2; 3; 4\}$

donc $\exp(S_4) = \operatorname{ppcm}(2; 3; 4)$

$= 12$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$, k longueur

$\mathcal{A}_n = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = +1\}$

$\mathcal{A}_3 = \{id, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

$\mathcal{A}_4 = \{id, (a\,b\,c), (a\,b)(c\,d)\}$

2) Mq $D(S_3) = A_3$.

- Montrer que $A_3 \trianglelefteq S_3$

→ $A_3 \subset S_3$

→ $A_3 \neq \emptyset$

→ Soit $\sigma, \tau \in A_3$

σ^{-1} : $\left\{ \begin{array}{l} (1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2) \in A_3 \\ (1\ 3\ 2)^{-1} = (1\ 2\ 3) \in A_3 \end{array} \right.$

$\sigma . \tau$: $\left\{ \begin{array}{l} (1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3) \in A_3 \\ (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = id \in A_3 \\ (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2) \in A_3 \end{array} \right.$

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = id$$

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)^{-1}$$

$$(1\ 3\ 2)$$

$$\rightarrow [S_4 : A_4] = \frac{|S_4|}{|A_4|}$$

$$= \frac{24}{12} = 2$$

donc A_4 est distingué dans S_4.

donc $C_4 \trianglelefteq D_4$

or $\left| D_4 / C_4 \right| = 2$

donc $D_4 / C_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

commutatif.

donc D_4 / C_4 est commutatif.

Alors $\boxed{D(D_4) \subset C_4}$

$\mathcal{A}_4$ est engendré par les 3-cycles $(a\ b\ c)$

Soit a, b, c trois entiers distincts.

$$\underbrace{(a\ b)}_{\sigma}\underbrace{(a\ c)}_{\tau}\underbrace{(a\ b)}_{\sigma^{-1}}\underbrace{(a\ c)}_{\tau^{-1}} = (a\ b\ c)$$

donc $(a\ b\ c) \in D(\mathcal{S}_4)$

Alors $\boxed{\mathcal{A}_4 \in D(\mathcal{S}_4)}$

3) $H = \{ id, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$.

• $H \subset S_4$, $H \neq \emptyset$

Soit $\sigma \in H$, $\sigma^{-1} \in H$

Soit $\sigma, \tau \in H$, $\sigma \circ \tau \in H$

$(12)(34)(12)(34) = id$

$(12)(34) = ((12)(34))^{-1}$

$|H| = 4$, donc $\begin{cases} H \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$

donc H est commutatif.

Soit $g \in S_4$, $h \in H$,

$ghg^{-1} \in H$.