Limites & Comparaisons

Théorème de comparaison :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

- $$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

- $$\left.\begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Théorème $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'encadrement} \\ \text{des gendarmes} \end{array} \right.$:

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$

$$\left.\begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$$

exemple :

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{n^2 + (-1)^n}_{u_n}$

① encadrer celui qui nous pose problème

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

② Construire la limite cherchée

$$n^2 - 1 \le n^2 + (-1)^n \le n^2 + 1$$

③ On passe à la limite quand $n \to +\infty$ (brouillon)

$$n^2 - 1 \le n^2 + (-1)^n \quad \cancel{\le n^2 + 1}$$

$+\infty \longleftarrow$ $\cancel{\longrightarrow +\infty}$

④ Appliquer un des théorèmes

or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$

et $\boxed{n^2 + (-1)^n \geqslant n^2 - 1}$

donc par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$

exemple :

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

or $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1 \\ \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1 \end{cases}$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$

Convergence Monotone

déf : Soit $(u_n)_n$ une suite

→ $(u_n)_n$ est majorée s'il existe un réel M tel que on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq M$

→ $(u_n)_n$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$

→ $(u_n)_n$ est bornée s'il existe M et m deux réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M$$

Monotone = croissante ou décroissante

théorème de convergence monotone

→ une suite croissante et majorée converge

→ une suite décroissante et minorée converge

prop : • si une suite est croissante et admet une limite finie ℓ, alors elle est majorée par ℓ.

• si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$

• si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Suites Géométriques

$u_n = u_0 \times q^n$

↳ limite ?

- si $q \leq -1$: q^n n'a pas de limite
- si $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- si $q = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- si $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$