Petite question :

$$2 \leq 1 + u_k \leq 3$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+u_k} \geq \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{\cdot}$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_k} \leq \frac{1}{2}$$

exercice 1 :

P_n : " $x^n - 1 = (x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ".

Initialisation : $n = 1$

$x^1 - 1 = x - 1$

$(x-1) \times 1 = x - 1$ ✓

Heredité : " $x^k - 1 = (x-1)(1+\dots+x^{k-1})$ "

Mq : $x^{k+1} - 1 = (x-1)(1+\dots+x^k)$

$$x^{k+1} - 1 = x^{k+1} + \underbrace{x^k - x^k}_{=0} - 1$$

$$= x^{k+1} - x^k + \underbrace{(x^k - 1)}_{\text{H.R}}$$

$$= x^{k+1} - x^k + (x-1)(1 + x + \dots + x^{k-1})$$

$$= x^k(x-1) + (x-1)(1 + \dots + x^{k-1})$$

$$= (x-1)(x^k + 1 + \dots + x^{k-1})$$

$$= (x-1)(1 + x + \dots + x^{k-1} + x^k)$$

$$= (x-1)(1 + x + \dots + x^k)$$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Conjecturer le sens de variation de (u_n).

$[0 ; +\infty[$

2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

3. Démontrer la conjecture.

2) $f'(x) = \frac{1}{2} > 0$

$\hookrightarrow$ donc f croissante sur $\mathbb{R}$.

3) On pose :

P_n : « $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$ »

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 10$

$u_1 = 6$

donc $u_0 < u_1$.

Hérédité : on suppose "$u_{k+1} \leq u_k$"

et on veut démontrer que

"$u_{k+2} \leq u_{k+1}$".

$$u_{k+1} \leq u_k$$

or $u_{k+1} = f(u_k)$ $\forall k \geq 0$,

et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$$

$f \nearrow$

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$ ✓

$$u_{k+1} \leq u_k$$

$$f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$$ $f(\cdot)$

$u_{k+1} = f(u_k)$
$\forall k$

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$