# Matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

↳ matrice de taille $2 \times 3$

déf : une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombre formé de $m$ lignes et $n$ colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres $a_{ij}$ sont appelés les coefficients de la matrice

remarque : • matrices de taille $n \times n$ sont appelée matrices carré

• matrice de taille $1 \times n$ est une matrice ligne

• matrice de taille $n \times 1$ est une matrice colonne

prop : Deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux deux à deux et si elles ont la même taille

- **Somme de matrices :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+5 & 2-3 \\ 3+4 & 4-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour additionner deux matrices on additionne $\underbrace{\text{terme par terme}}$

↳ même position dans la matrice

**prop:**

Commutativité → $A+B=B+A$

Associativité → $(A+B)+C$
$= A+(B+C)$

- **Multiplication par un scalaire**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} -2\times3 & 5\times3 \\ 2\times3 & -4\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

## Prop :

- $kA + k'A = (k+k')A$

$\hookrightarrow 3A + 2A = 5A$

- $k(A+B) = kA + kB$

$\hookrightarrow 3(A+B) = 3A + 3B$

- $(kk')A = k(k'A)$

$\hookrightarrow (3\times 5)A = 3(5A)$

## Multiplication de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\times -2 + 5\times 1 & 2\times 3 + 5\times 4 \\ -3\times -2 + 1\times 1 & -3\times 3 + 1\times 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\times$ $+$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

## exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$2\times 4 + 5\times 0$

$2\times 1 + 5\times 2$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -12 & -1 \end{pmatrix}$$

$-3\times 4 + 1\times 0$

$-3\times 1 + 1\times 2$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

↳ le produit matriciel n'est pas toujours commutatif.

**exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $A \times B$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 4 & 4 & 20 \\ -2 & 5 & -20 \end{pmatrix}$$

---

prop : $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lcc} & & \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \\ A \times B = & \begin{pmatrix}2 & 5\\-3 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}26\\-5\end{pmatrix}\end{array}$$

**prop :**

- <u>associativité</u> : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

- <u>distributivité</u> : $\begin{cases} A \times (B + C) = A \times B + A \times C \\ k(A \times B) = (kA) \times B \end{cases}$

$$= A \times (kB)$$

## • Puissance de Matrices

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

- $$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{taille } 3 \times 3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{taille } 2 \times 2$$

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \times A \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$