Suites

Les formes indéterminées

$+\infty - \infty$ | $0 \times \infty$ | $\frac{0}{0}$ | $\frac{\infty}{\infty}$

1 Méthode : Factoriser

On cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 5n + 1$

strong

$$\underbrace{\underset{+\infty}{n^2} \quad - \quad \underset{-\infty}{5n}}_{F.I}$$

$$n^2 - 5n + 1 = n^2\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

or $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0}$ $\rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0}$

donc par <u>somme de limites</u>

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$$

et par produit de limites

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \times \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \boxed{+\infty}$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty}$

On cherche $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}}_{\text{F.I}}$

$+\infty$

$\to +\infty$

F. I

$$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{\cancel{n^2}\left(5 + \frac{4}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(4 + \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}\right)}$$

$$= \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

donc par somme de limites

$$\lim_{n \to +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$$

$$\lim_{n \to +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$$

et par quotient de limites

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{5}{4}}$

② Méthode : de conjugué

On cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\sqrt{n+2}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty}$

$\underbrace{+\infty - \infty}_{F.I}$

conjugué

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \times \boxed{\frac{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}}$$

$\hookrightarrow = 1$

développer

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\cancel{n} + 2 - \cancel{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

or $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty \\ \lim \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$

donc par somme de limites

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty.$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 2 \times 0 = 0$

$2 \times \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0}$