## Exercice 3 corrigé disponible

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

On pose la propriété

$P_n$ : « $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_n \leq 2$ ».

---

**Initialisation** : $n = 0$

$$1 \leq u_0 = 2 \leq 2$$

donc $P_0$ est vraie

**Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$ : $1 \leq u_k \leq 2$

Montrons que la propriété est vraie au rang $k+1$ : $1 \leq u_{k+1} \leq 2$

Par hypothèse de récurrence :

$$1 \leq u_k \leq 2$$

$$2 \leq 1 + u_k \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_k} \leq \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_k} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$1 \leq \frac{4}{3} \leq u_{k+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

## Exercice 5

Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

On pose la propriété

$P_n$ : « $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ »

---

**Initialisation** : $n = 0$

$u_0 = 2$ et $u_0 = \dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$

donc $P_0$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons $P_a$ propriété vraie pour un certain rang $k$ : « $u_k = \frac{2}{2k+1}$ ».

Démontrons $P_a$ au rang $k+1$.

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k}$$

or par hypothèse de récurrence, on a : $u_k = \frac{2}{2k+1}$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{2k+1}}{\frac{2k+3}{2k+1}}$$

$$= \frac{2}{\cancel{2k+1}} \times \frac{\cancel{2k+1}}{2k+3}$$

$$= \frac{2}{2k+3}$$

$$= \frac{2}{2(k+1)+1}$$

donc $P_{k+1}$ est vraie

## Exercice 13

On considère une suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

On pose la propriété :

$P_n$ : $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} \geq u_n$

---

Initialisation : $n = 0$

$u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{1+u_0}$

$= \sqrt{2}$

et $\sqrt{2} \geq 1$, d'où $u_1 \geq u_0$.

donc $P_0$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang $k$ : $u_{k+1} \geqslant u_k$.

et démontrons qu'elle est vraie au rang $k+1$ : $u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$.

Or par hypothèse de récurrence :

$$u_{k+1} \geqslant u_k$$

$$1 + u_{k+1} \geqslant 1 + u_k$$

$\sqrt{\cdot}$ est croissante

$$\sqrt{1 + u_{k+1}} \geqslant \sqrt{1 + u_k}$$

$$u_{k+2} \geqslant u_{k+1}.$$

## Exercice 1

Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$S_n = \cancel{\sum_{k=0}^{n} k} = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On pose $P_n$ : « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ »

**Initialisation :** $n = 0$

$S_0 = 0$ et $\dfrac{0 \times (0+1)}{2} = 0$

donc $P_0$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

Démontrons que $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$S_{k+1} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{0 + 1 + \cdots + k}_{S_k} + (k+1)$$

$$= S_k + (k+1)$$

H.R

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

or $(k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2$