Espérance Conditionnelle

déf : $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

l'espérance conditionnelle de X sachant $B \in \mathcal{F}$.

$$\boxed{E[X \mid B] = \frac{E[X \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}}$$

↳ $E[X \mid \cdot]$ est une <u>v.a</u>

Calcul pratique :

Soit $X \in \mathbb{L}^1$ et Y discrète.

$$E[X|Y] = \sum_{y \in Y(\Omega)} E[X|Y=y] \cdot \mathbb{1}_{Y=y}$$

$$E[X|Y=y] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X=x|Y=y)$$

exemple : X, Y deux v. a de Bernoulli de $\mathcal{B}(p)$ iid

et $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y=2\}}$.

Que vaut $\mathbb{E}[X \mid Z]$?

$$\mathbb{E}[X \mid Z] = h(Z)$$

$$= \mathbb{E}[X \mid Z=0] \, \mathbb{1}_{Z=0}$$

calcul ! ↙ pas touche !!

$$+ \mathbb{E}[X \mid Z=1] \, \mathbb{1}_{Z=1}$$

- $\mathbb{E}[X \mid Z=1]$

$$= 0 \times \mathbb{P}(X=0 \mid Z=1)$$

$$+ 1 \times \mathbb{P}(X=1 \mid Z=1).$$

$$= \mathbb{P}(X = 1 \mid Z = 1)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Z = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)}$$

$$= \frac{p \times p}{\mathbb{P}(Z = 1)} = 1.$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = p^2$$

- $E[X \mid Z=0]$

$$= 0 \times \mathbb{P}(X=0 \mid Z=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1 \mid Z=0)$$

$$= \mathbb{P}(X=1 \mid Z=0)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=1, Z=0)}{\mathbb{P}(Z=0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=0)}{\mathbb{P}(Z=0)}$$

$$= \frac{p(1-p)}{\mathbb{P}(Z=0)} = \frac{p(1-p)}{1-p^2}$$

$$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X+Y \neq 2)$$

$$= \mathbb{P}(X+Y=0)$$

$$+ \mathbb{P}(X+Y=1)$$

$$= \mathbb{P}(X=0, Y=0)$$

$$+ 2 \times \mathbb{P}(X=1, Y=0)$$

$$= (1-p)^2 + 2p(1-p)$$

$$= 1 - \cancel{2}p + p^2 + \cancel{2}p - 2p^2$$

$$= 1 - p^2$$

Donc :

$$E[X|Z] = \frac{p(1-p)}{1-p^2} \mathbb{1}_{Z=0} + 1 \times \mathbb{1}_{Z=1}$$

Calcul pratique :

Soit $X \in \mathbb{L}^1$ et $(X ; Y)$ admet une densité jointe $\rho_{X,Y}$.

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x \times \frac{\rho_{X,Y}(x,y)}{\rho_Y(y)} \, dx \\ 0 \qquad \rho_Y(y) = 0 \end{cases}$$

exemple :

$$p_{X,Y} = \frac{1}{y} e^{-y} \mathbb{1}_{y>0} \mathbb{1}_{0 \le x \le y}$$

On cherche $E[X|Y]$.

$$p_Y(y) = \int$$

propriétés :

1. $E[aX+bY \mid \mathcal{B}] = a\,E[X\mid\mathcal{B}] + b\,E[Y\mid\mathcal{B}]$

2. Si $X \geq 0$ p.s, $E[X\mid\mathcal{B}] \geq 0$ p.s

3. Si ϕ convexe, alors

$$\phi\left(E[X\mid\mathcal{B}]\right) \leq E[\phi(X)\mid\mathcal{B}]$$

4. si $X \perp\!\!\!\perp$ de $\mathcal{B}$,

$$E[X\mid\mathcal{B}] = E[X]$$

5. $E\left[E[X\mid\mathcal{B}]\right] = E[X]$

6 $E[f(X) \mid Y]$

↳ formule de transfert est possible

7 Si X est $\mathcal{B}$-mesurable

$E[X \mid \mathcal{B}] = X$

exercice 13 :

2) Soit $k \in \{1, \dots, 6\}$

$$g(k) = E[S \mid X = k]$$

$$= \frac{E[S \, \mathbb{1}_{X=k}]}{\mathbb{P}(X=k)}$$

or $E[S \cdot \mathbb{1}_{X=k}]$

$$= E[(X+4) \cdot \mathbb{1}_{X=k}]$$

$$= E[(k+4) \cdot \mathbb{1}_{X=k}]$$

$$= E[k \cdot \mathbb{1}_{X=k}] + E[Y \cdot \mathbb{1}_{X=k}]$$

! X, Y ind

$$= k \cdot E[\mathbb{1}_{X=k}] + \underbrace{E[Y]}_{=0} E[\mathbb{1}_{X=k}]$$

$$= k \cdot \mathbb{P}(X=k) + 0$$

donc $E[S|X=k] = \dfrac{k\,\cancel{\mathbb{P}(X=k)}}{\cancel{\mathbb{P}(X=k)}}$

$$= k.$$

Donc :

$$E[S|X] = \sum_{k=1}^{6} E[S|X=k]\,\mathbb{1}_{X=k}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \overset{X}{k} \cdot \mathbb{1}_{X=k} = X$$

3) $E[X|X] = X$

$E[X|Y] = E[X]$

$$E[S|X] = E[X+Y|X]$$
$$= E[X|X] + E[Y|X]$$
$$= X + 0$$
$$= X$$

$$E[X|S] = \sum_{s=0}^{7} E[X|S=s] \cdot \mathbb{1}_{S=s}$$

à calculer

$$E[X \mid S=0]$$

$$= \sum_{k=1}^{6} k \cdot \mathbb{P}(X=k \mid S=0)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=1, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)} + \cancel{\frac{\mathbb{P}(X=2, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)}} + \cancel{\frac{\mathbb{P}(X=3, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)}} + \cancel{\frac{\mathbb{P}(X=4, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)}} + \cancel{\frac{\mathbb{P}(X=5, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)}} + \cancel{\frac{\mathbb{P}(X=6, S=0)}{\mathbb{P}(S=0)}}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=-1)}{\mathbb{P}(S=0)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\mathbb{P}(X+Y=0)} = 1.$$